

جورج لیکاف و رافائل ای. نونیس

## ریاضیات از کجا می آید؟

چه گونه ذهن جسمانی ریاضیات را خلق می کند؟

ترجمه‌ی

جهان‌شاه میرزاییگی



۶۰۲	۲۱
۵۲۲	۲۱
۲۵۲	۲۱
۱۸۶	

### فهرست

۷	یادداشت مترجم
۱۳	پیش‌گفتار
۲۱	مقدمه: چرا علوم شناختی برای ریاضیات اهمیت دارد
	<b>بخش یکم. جسمانیت حساب پایه</b>
۳۵	۱. حساب ذاتی مغز
۴۹	۲. مقدمه کوتاهی بر علوم شناختی ذهن جسمانی
۷۵	۳. حساب جسمانی: استعاره‌های پایه‌گذار
۱۰۵	۴. قوانین حساب از کجا می‌آیند؟
	<b>بخش دوم. جبر، منطق، و مجموعه‌ها</b>
۱۳۷	۵. جوهر و جبر
۱۵۳	۶. استعاره بولی: رده‌ها و منطق نمادی
۱۷۳	۷. مجموعه‌ها و ابرمجموعه‌ها
	<b>بخش سوم. جسمانیت بی‌نهایت</b>
۱۹۱	۸. استعاره پایه بی‌نهایت
۲۲۱	۹. اعداد حقیقی و حدها
۲۵۳	۱۰. اعداد ترامتناهی
۲۶۹	۱۱. بی‌نهایت کوچک‌ها

بخش چهارم. تحریم فضا و حرکت:  
برنامه گسسته‌سازی که ریاضیات مدرن را شکل داد

- ۳۰۹ ۱۲. نقاط و پیوستارها  
۳۴۵ ۱۳. پیوستگی اعداد: کام‌یابی استعاره‌های ددکیند  
۳۵۹ ۱۴. حسابان بدون فضا یا حرکت: شاهکار استعاری و ایرشتراس  
۳۸۱ میان‌وعده — تشدید اشتها: تناقض‌نمای بی‌نهایت کلاسیک

بخش پنجم. پی‌آمدها در فلسفه ریاضیات

- ۳۹۵ ۱۵. نظریه ریاضیات جسمانی  
۴۲۵ ۱۶. فلسفه ریاضیات جسمانی

بخش ششم:  $e^{\pi i} + 1 = 0$

- ۴۴۳ مطالعه موردی ۱: هندسه تحلیلی و مثلثات  
۴۵۹ مطالعه موردی ۲:  $e$  چیست؟  
۴۸۳ مطالعه موردی ۳:  $i$  چیست؟  
۴۹۷ مطالعه موردی ۴:  $e^{\pi i} + 1 = 0$   
۵۱۷ کتاب‌نامه

دشوار نیست. در نتیجه، زبان‌شناسان شناختی باید خود را برای یک تکلیف دشوار آماده سازند.

اما این تکلیف فقط در صورتی فوق‌العاده دشوار است که ما از آن‌ها بخواهیم ریاضیات یاد بگیرند. این کار، اگر ناممکن نباشد، فوق‌العاده دشوار است. ما در همه موارد زندگی در مواردی موضوع‌هایی را مطالعه می‌کنیم که هیچ‌گاه کاملاً آن‌ها را نمی‌فهمیم. بسته به هدفی که داریم مطلب را با چشم جارو می‌کنیم یا به اصطلاح روزنامه‌وار می‌خوانیم و نکات تازه‌ای از آن یاد می‌گیریم. مثلاً ممکن است علاقه‌مند بشویم مطلبی را جمع به آرایمر یا ام آر آی بخوانیم. پیشاپیش می‌دانیم که قرار نیست ما جزئیات دستگاه ام آر آی را یاد بگیریم. حتی بیشتر کسانی که با ام آر آی (و بسیاری دستگاه‌های دیگر) کار می‌کنند دانش تخصصی درباره آن ندارند. در این مطالعه هدف ما راهنمای ماست. ما از یافته‌های علوم شناختی می‌دانیم که دانش، معنی، مفاهیم، ذهن، خرد، و استدلال جسمانی هستند. ریاضیات هم که تاکنون ادعا می‌شد ایده ناب و ناجسمانی است از این قاعده مستثنا نیست. پس لازم می‌آید که در پی یافتن رد اثر جسمانیت در ایده‌ها و نمادهای ریاضی‌ای باشیم که رنج مطالعه آن‌ها را بر خود هموار می‌کنیم. البته، همین که قرار نیست ریاضیات یاد بگیریم در تحمل این دشواری خیلی به ما کمک می‌کند. از سوی دیگر، صد در صد مطالب کتاب، به‌طور پیوسته و یک‌دست غیرقابل فهم نیست. مطالعه این کتاب مثل کوه‌نوردی است. بخش‌های دشوار مانند سربالایی‌های تندوتیز و صعب‌العبور هستند. اما در پایان هر گردنه نفس‌گیر به‌جای نسبتاً همواری می‌رسید که رسیدن به آن واقعاً لذت‌بخش است. کتاب هم همین‌گونه است، همیشه بعد از تحمل مطالعه مطالب سخت، که شاید فکر می‌کنید هیچی از آن نفهمیده‌اید، به تحلیل مطالب می‌رسید که برای شما آشناست. چراغ راهنمای شما در این عبور سخت و پرخطر فرایندهای شناختی، به‌ویژه، استعاره است. وقتی پس از تحمل مطالعه چیزهای دیرفهم، به کمک استعاره که به ما امکان می‌دهد یک چیز را بر حسب چیز دیگر بفهمیم، به این‌جا می‌رسید که اعداد نقاطی بر روی یک خط هستند، یا اعداد مجموعه‌ها هستند لذت این فهم چند برابر می‌شود. وقتی یاد می‌گیرید که مفاهیم پایه‌ای چون بی‌نهایت، صفر، خط، نقطه، اعداد منفی، اعداد گنگ، اعداد موهومی و بسیاری دیگر از طریق سازوکارهای شناختی از نوع همان حساب ساده اولیه (مثل شمارش با انگشتان) بسط یافته و صورت واقعیت به خود گرفته‌اند نگاه شما به جهان پیرامون خود تغییر خواهد کرد. وقتی فهمیدید که نمادهای به‌ظاهر بی‌معنی ریاضیات مانند  $\sqrt{}$ ,  $\Delta$ ,  $\emptyset$ ,  $\pi$ ,  $i$  یا  $\infty$ ,  $=$ ، از طریق تحلیل ایده ریاضی، معنی پیدا می‌کنند و معنی آن‌ها در برنامه‌های حسی-حرکتی، و تجارب روزمره عادی ما ریشه دارد شکوه و عظمت دست‌آوردهای علوم شناختی در مدت بسیار کوتاه عمر خود بر

شما روشن خواهد شد. از همه این‌ها گذشته خستگی از تن شما به‌در می‌شود و متوجه می‌شوید که کتاب ارزش خواندن دارد، حتی اگر خیلی سخت باشد. بنابراین، توصیه می‌کنم کتاب را بخوانید، حتماً بخوانید، از سختی آن نترسید و سعی نکنید این نوع ریاضیات در این سطح را یاد بگیرید.

مسئله دانش‌پیشگان علوم پایه، هم از لحاظ کمی و هم کیفی، تا حدی متفاوت است. در این‌جا مسئله سطح به عمق، بی‌معنایی به معنا، یا نماد به ایده است. معمولاً ریاضیات را ابزار مطالعه علوم می‌دانند. و ابزار هم با همه اهمیتی که دارد به اصل موضوع مربوط نمی‌شود، اگر نشود میخ را با چکش در دیوار فرو کنیم، از سنگ استفاده می‌کنم. در این‌جا سنگ و چکش ارتباط معنایی-محتوایی با دیوار و میخ و هدف من ندارند. نمادهای ریاضی هم وسیله فهم محتوای ریاضی و ابزار استدلال درباره آن و تدریس آن هستند. بهترین مثالی که غالباً به آن اشاره می‌شود جدول ضرب است. میلیون‌ها نفر جدول ضرب را خوب خوب حفظ می‌کنند و در زندگی به کار می‌برند بدون این که معنایی به اعداد نسبت بدهند: دودوتا، هفت هشت تا، و به همین ترتیب. این موضوع به‌گونه‌ای به یک عادت یا حتی یک باور تبدیل شده است: ریاضیات ابزار است! نمادهای بی‌معناست! هیچ کس احساس نمی‌کند باید پرسد بینهایت چیست؟ یعنی به‌طور طبیعی [مثل جدول ضرب] تکرار می‌کند که اعداد نقاطی بر روی یک خط هستند. چرا؟ و چه‌گونه؟ مثلاً صفر چیست؟ نه عدد است! و نه بخشی از ریاضیات ذاتی! مدت‌زمان زیادی هم اصلاً صفر وجود نداشته است (ص. ۴۲۴).

بار این عادت و باور بر ذهن افراد سنگینی می‌کند و اجازه نمی‌دهد پرسش‌هایی از نوع پرسش‌های زیر مطرح کنند و با استفاده از همان خلاقیت ریاضی خود در پی کشف و حل آن‌ها برآیند: عدد منفی چیست؟ عدد گنگ، عدد متعالی، عدد گول‌پیکر، عدد ابرحقیقی، بی‌نهایت کوچک، اپسیلون، عدد دانه‌ای. معادله اوایلر  $e^{\pi i} + 1 = 0$  چه‌گونه رابطه‌ای است؟ عدد  $e$  یعنی ... 2.71812818284 چه‌گونه می‌تواند به توان عدد  $\pi$ ، یعنی ... 3.14159 برسد و بعد در  $\sqrt{-1}$  ضرب شود؟ این  $\sqrt{-1}$  چه‌گونه عددی است؟ اصلاً عدد است؟ آیا کسی تا حالا  $\sqrt{-1}$  متر پارچه خریده است؟ برای پاسخ‌دادن به این پرسش‌ها باید این کتاب را بخوانید. اجازه بدهید از خود کتاب نقل قولی بیاورم: نمادها فقط نمادند، ایده نیستند. محتوای مفهومی ریاضیات در ایده‌هایش نهفته است، نه در خود نمادها ... محتوای مفهومی جایی نیست که دقت ریاضی مشاهده می‌شود، بلکه در ایده‌های انسانی است (ص. ۷).

... حلقه بین صورت‌گرایی ریاضی با استفاده از نمادها و ایده‌هایی که نمادها بازمی‌نمایند بخشی از مطالعه ذهن است، بخشی از علوم شناختی است، نه بخشی از